JOURNAL OF NUMBER THEORY 11, 21–48 (1979)

Remarques sur les Unités Cyclotomiques et les Unités Elliptiques*

ROLAND GILLARD

Laboratoire de Mathématiques Pures—Institut Fourier dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, B. P. 116, 38402 St. Martin D'Hères, France

Communicated by H. W. Leopoldt

Received May 28, 1978

Le but de la première partie de ce travail est de mieux comprendre la structure des groupes d'unités cyclotomiques d'un corps abélien réel F introduits par H. Leopoldt [7]. On fait au passage le lien avec le groupe C^1 introduit par H. Hasse dans le cas cyclique. Un résultat de J. Martinet joue un rôle fondamental, car il permet d'écrire des $\mathbb{Z}$-bases pour les différents groupes d'unités utilisés. Soient E le groupe des unités et h le nombre de classes de F. On prouve notamment qu'en remplaçant le groupe des unités cyclotomiques formelles C^0 de F, par un groupe plus grand C^2, la formule de Leopoldt [7, Satz 20]

$$Q_G \cdot h = [E : C^0]$$

devient

$$Q_G^{(2)} \cdot h = [E : C^2]$$

où $Q_G^{(2)}$ est un nombre en général beaucoup plus petit que Q_G. Il arrive même, dans certains cas, que $Q_G^{(2)}$ ait un dénominateur > 1; la formule précédente implique alors la divisibilité de h par ce dénominateur. On donne enfin une formule reliant h aux nombres de classes des sous-extensions cycliques de $F/\mathbb{Q}$.

Dans la deuxième partie, on adapte au cas d'une extension abélienne d'un corps quadratique imaginaire, la méthode employée dans la première partie. Le groupe d'unités elliptiques $\mathscr{V}_4$ de [2] joue alors un rôle analogue à celui des unités cyclotomiques formelles. On l'agrandit de façon à diminuer notablement le facteur $1/q_H \cdot (N_G)^{[\mathfrak{G}/G]}/[G]$ du théorème de [2]. Même dans le cas cyclique, la formule reliant l'indice du groupe des unités elliptiques au nombre de classes, contient un facteur parasite, provenant des propriétés des idéaux J_ξ introduits par G. Robert dans [8].

Le § 1 contient des notations générales communes aux deux parties. Les résultats principaux sont énoncés aux § 2 et 6.

* Avec un appendice de G. Robert.

0022-314X/79/010021-28$02.00/0

Je tiens à remercier G. Robert qui m'a fait part de critiques et suggestions très profitables et a réussi à traiter le cas des caractères exceptionnels (cf. appendice).

1. Notations Générales

1.1. Soit μ le groupe des racines de l'unité dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. On choisit un isomorphisme de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dans μ et on note pour n dans $\mathbb{N}$, ζ_n l'image de la classe de $1/n$. On désigne par J la conjugaison complexe dans $\mathbb{Q}(\mu)$. Pour tout corps de nombres L, soit h_L le nombre de classes de L.

Soit F/K une extension abélienne finie de corps de nombres, de groupe de Galois G. Notons E et h le groupe des unités et le nombre de classes de F. Pour tout caractère ξ de G, défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$, introduisons le sous-groupe $\ker \xi = \{\sigma \in G \mid \xi(\sigma) = \xi(1)\}$, F_ξ le sous-corps de F fixé par $\ker \xi$ et G_ξ le quotient $G/\ker \xi$. Le groupe G_ξ est cyclique. Notons g_ξ son ordre, d_ξ le discriminant du polynôme cyclotomique P_{g_ξ} d'indice g_ξ et choisissons un générateur $\sigma(\xi)$ de G_ξ parmi les $\varphi(g_\xi)$ possibles. Si ξ est différent du caractère unité ξ_0, on introduit l'élément de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[G_\xi]$

$$\gamma_\xi = \prod_{p \mid g_\xi} (1 - \sigma(\xi)^{g_\xi/p}),$$

le produit étant pris sur l'ensemble des diviseurs premiers de g_ξ.

1.2. Définissons une relation d'ordre partiel sur les caractères ξ en posant

$$\xi' \leqslant \xi \Leftrightarrow F_{\xi'} \subseteq F_\xi .$$

Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre total sur l'ensemble des caractères telle que

$$\xi' \leqslant \xi \Rightarrow \xi' \preccurlyeq \xi.$$

On note $\xi' < \xi$ (resp. $\xi' \prec \xi$) pour $\xi' \leqslant \xi$ et $\xi' \neq \xi$ (resp. $\xi' \preccurlyeq \xi$ et $\xi' \neq \xi$). L'introduction de $\prec$ revient à numéroter les caractères de façon compatible avec l'inclusion des corps correspondants. Ceci n'est pas canonique mais permet de raisonner par récurrence (cf. § 4.1 et § 6.2).

Pour ξ et ξ' vérifiant $\xi' < \xi$, soit $\nu_{\xi,\xi'}$ la somme dans $\mathbb{Z}[G_\xi]$ des éléments du noyau de la surjection $G_\xi \to G_{\xi'}$. Pour chaque ξ distinct de ξ_0, désignons par $\mathcal{N}_\xi$ l'idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ engendré par les éléments $\nu_{\xi,\xi'}$ avec $\xi' < \xi$. Le résultat suivant est dû à J. Martinet, cf. [3]:

Proposition 1. *Pour $\xi \neq \xi_0$ l'idéal $\mathcal{N}_\xi$ de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ est engendré par $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$.*

En envoyant $\sigma(\xi)$ sur ζ_{g_ξ}, on obtient alors un isomorphisme

$$\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi \simeq \mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]. \tag{1}$$

1.3. Si H est un groupe fini, on note $[H]$ son ordre et $I(H)$ l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[H]$. Nous disons qu'on entier $n > 1$ est composé (resp. primaire) s'il possède (resp. s'il ne possède pas) au moins deux facteurs premiers distincts; nous disons qu'il est p-primaire, si p est un nombre premier et que n est puissance de p. Pour chaque diviseur premier p de $[G]$, soit a_p le nombre de sous-groupes cycliques de G d'ordre p-primaire. On introduit l'entier

$$M_G = \frac{1}{[G]} \prod_{p|[G]} p^{a_p}. \tag{2}$$

Pour chaque ξ, considérons l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$

$$e_\xi = \frac{1}{[G]} \sum_{\sigma \in G} \xi(\sigma^{-1})\, \sigma \tag{3}$$

et $u_\xi = [G]\, e_\xi$. Désignons par N_G l'indice de $\mathbb{Z}[G]$ dans la somme directe $\bigoplus e_\xi \mathbb{Z}[G]$ (dans ce genre d'expression, sauf mention du contraire, ξ décrit l'ensemble de tous les caractères de G définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$). D'après [7, § 1.3], on a

$$N_G = \left(\frac{[G]^{[G]}}{\prod d_\xi}\right)^{1/2}.$$

Ainsi N_G est égal à $[G]$ fois l'indice Q_G de loc. cit. On introduit aussi l'entier C_G, cf. [4, § 14 et § 15]:

$$C_G = \left[\prod d_\xi \cdot \left(\frac{[G]}{g_\xi}\right)^{\varphi(g_\xi)}\right]^{1/2} = \prod_{p|[G]} p^{\frac{1}{2}\sum_m (q(m)-m)}$$

où m parcourt l'ensemble des diviseurs de $[G]$ tels que $[G]/m$ soit p-primaire et où $q(m)$ désigne le nombre d'éléments σ de G vérifiant $\sigma^m = 1$. On peut calculer N_G à l'aide de C_G : en remplaçant chaque d_ξ par sa valeur et en utilisant la relation $[G] = \sum \varphi(g_\xi)$ on obtient:

$$N_G/C_G = \prod_\xi \prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}. \tag{4}$$

Si G est le produit de deux groupes G_1 et G_2 d'ordres premiers entre eux et en définissant N_{G_i}, M_{G_i}, C_{G_i} $(i = 1, 2)$ comme N_G, M_G, C_G, on a les formules

$$M_G = M_{G_1} \cdot M_{G_2}, \qquad N_G = N_{G_1}^{[G_2]} \cdot N_{G_2}^{[G_1]}, \qquad C_G = C_{G_1}^{[G_2]} \cdot C_{G_2}^{[G_1]}$$

qui ramènent les calculs au cas où $[G]$ est primaire. Soit v_p la valuation p-adique de $\mathbb{Z}$ (p premier, $v_p(p) = 1$). Si $[G]$ est p-primaire, (4) entraîne :

$$v_p(N_G/C_G) = \frac{[G] - 1}{p - 1}.$$

Exemples :

— $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ alors

$$v_p(C_G) = v_p(M_G) = 0, \qquad v_p(N_G) = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

— $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ alors

$$v_p(M_G) = \frac{p^n - 1}{p - 1} - n,$$

$$v_p(C_G) = \frac{1}{2}\left[(n - 1)\,p^n + 1 - \frac{p^n - 1}{p - 1}\right],$$

$$v_p(N_G) = \frac{1}{2}\left[(n - 1)\,p^n + 1 + \frac{p^n - 1}{p - 1}\right].$$

— $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ (avec $0 \leqslant n \leqslant m$):

$$v_p(M_G) = (1 + p)\,\frac{p^n - 1}{p - 1} + (m - n)\,p^n - (m + n),$$

$$v_p(C_G) = \frac{1}{2}\left[np^{n+m} - p\,\frac{p^{2n} - 1}{p^2 - 1}\right],$$

$$v_p(N_G) = \frac{p^{n+m} - 1}{p - 1} + v_p(C_G).$$

Enfin, si G est cyclique, on a $M_G = C_G = 1$.

2. Résultats pour les unités cyclotomiques

2.1. Du § 2 au § 5, on se place dans le cas où $K = \mathbb{Q}$. Soit f_ξ le conducteur (resp. E_ξ le groupe d'unités) de F_ξ. Pour $\xi \neq \xi_0$, choisissons pour tout automorphisme sur F_ξ, σ, du sous-corps réel maximum de $\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})$ un prolongement $\bar{\sigma}$ à $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ et définissons un entier de $\mathbb{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ (cf. [7] § 8) par

$$\theta_\xi = \prod_\sigma \bar{\sigma}(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1}). \tag{5}$$

Notons d'une part que J opère sur $\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1}$ en changeant son signe.

D'autre part, on déduit de l'écriture de ce nombre sous la forme $\zeta_{2f_\xi}(1 - \zeta_{f_\xi}^{-1})$ la relation

$$(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1})^{1+J} = (1 - \zeta_{f_\xi})^{1+J}.$$

Des remarques précédentes, on tire

$$\theta_\xi^{\,J} = (-1)^{s(\xi)}\, \theta_\xi\,, \qquad \theta_\xi^{\,2} = (-1)^{s(\xi)}\, N_{\mathbb{Q}(\zeta_{f_\xi})/F_\xi}(1 - \zeta_{f_\xi}) \tag{6}$$

avec $s(\xi) = \varphi(f_\xi)/2g_\xi$. Ceci montre que $\theta_\xi^{\,2}$ est dans F_ξ. Pour α dans G_ξ, désignons par $\theta_\xi^{\,\alpha}$ une racine carrée de $\alpha(\theta_\xi^{\,2})$. On prolonge par multiplicativité cette définition à $\mathbb{Z}[G_\xi]$. Pour α dans G_ξ, $\theta_\xi^{\alpha-1}$ est dans E_ξ; il en est de même pour $\theta_\xi^{\gamma_\xi}$. Si $\mathfrak{A}_\xi$ est un idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$, notons $\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi}$ l'image de $\mathfrak{A}_\xi$ par l'application $\alpha \to \theta_\xi^{\,\alpha}$. Pour tout $\xi \neq \xi_0$, soit $\mathfrak{A}_\xi^{\,0}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ engendré par γ_ξ et posons:

$$\text{si} \quad \xi \neq \xi_0\,, \qquad C_\xi^{\,0} = \pm\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi^0}, \qquad C_{\xi_0}^0 = \pm 1, \qquad C^0 = \prod C_\xi^{\,0}.$$

Leopoldt ([7]) appelle C^0 groupe d'unités cyclotomiques formelles de F et démontre:

Théorème 1. *L'indice de C^0 dans E est égal à $h \cdot Q_G$.*

Comme cet indice est fini, on voit que pour chaque $\xi \neq \xi_0$, le $\mathbb{Z}$-rang de $C_\xi^{\,0}$ (i.e. la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $C_\xi^{\,0} \otimes \mathbb{Q}$) est $\varphi(g_\xi)$, donc que l'application de $2\mathfrak{A}_\xi^{\,0}$ dans $C_\xi^{\,0}$, $\alpha \to \theta_\xi^{\,\alpha}$, est un $\mathbb{Z}[G_\xi]$-homomorphisme injectif.

2.2. Pour chaque $\xi \neq \xi_0$, considérons un idéal $\mathfrak{A}_\xi$ de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ contenant $\mathfrak{A}_\xi^{\,0}$ et posons

$$\text{pour} \quad \xi \neq \xi_0\,, \qquad C_\xi = \pm\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi}, \qquad C_{\xi_0} = \pm 1, \qquad C = \prod C_\xi\,. \tag{7}$$

Remarquons que C_ξ ne dépend pas des choix faits en 2.1 lors de la définition de θ_ξ (choix de $\tilde{\sigma}$ relevant σ) et de $\theta_\xi^{\,\alpha}$ (choix d'une racine carrée de $\theta_\xi^{2\alpha}$). Désignons par $\mathfrak{B}_\xi$ l'image de $\mathfrak{A}_\xi$ dans $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ par l'application déduite de (1) et par $N(\mathfrak{B}_\xi)$ la norme de cet idéal. On suppose en outre que pour chaque $\xi \neq \xi_0$, C_ξ est inclus dans E_ξ et vérifie

$$\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi \cap \mathcal{N}_\xi} \subset \prod_{\xi' < \xi} C_{\xi'}\,. \tag{8}$$

Le théorème suivant complète et généralise le théorème 1 et sera démontré au § 4.

THÉORÈME 2. *L'indice de C dans E vérifie les égalités*

$$[E:C] = h \cdot \frac{C_G}{[G]} \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} N(\mathfrak{B}_\xi) = \left[E:\prod E_\xi\right] \cdot \prod_\xi \left[E_\xi : C_\xi \cdot \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}\right].$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème 2 en faisant différents choix $\mathfrak{A}_\xi^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) pour le idéaux $\mathfrak{A}_\xi$. Les objets introduits plus haut sont alors notés $\mathfrak{B}_\xi^i$, C_ξ^i, C^i. La condition (8) est étudiée en 3.1. Les différents énoncés ci-dessous sont comparés sur deux exemples en 2.5.

2.3. Soit $\mathfrak{A}_\xi^1$ ($\xi \neq \xi_0$), l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}[G_\xi]$. D'après 2.1, on a bien $C_\xi^1 \subset E_\xi$. De plus, $N(\mathfrak{B}_\xi^1)$ vaut 1 si g_ξ est composé et l si g_ξ est l-primaire. A l'aide de (2), on obtient en posant $Q_G^{(1)} = C_G \cdot M_G$:

COROLLAIRE 1. *L'indice de C^1 dans E est égal à $h \cdot Q_G^{(1)}$.*

Remarquons que si G est cyclique, $M_G \cdot C_G$ vaut 1 et on retrouve les résultats de [4] § 17. Hasse définit C^1 comme groupe engendré par un système explicite. Pour retrouver ce système, il suffit de choisir pour chaque $\xi \neq \xi_0$ une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$, d'où par multiplication par $1 - \zeta_{g_\xi}$ une $\mathbb{Z}$-base de $\mathfrak{B}_\xi^1$. En procédant alors comme en 4.1, on obtient un système qui avec ± 1 engendre C^1. Ainsi nous avons rendu canonique la construction de [4]: elle ne dépend pas du choix de la base de $\mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ effectué pour chaque ξ.

2.4. Pour $\xi \neq \xi_0$, soit $\mathfrak{A}_\xi^2$ l'idéal $\{\alpha \in \mathbb{Z}[G_\xi] \| \theta_\xi^\alpha \in E\}$. Posons $l_\xi = N(\mathfrak{B}_\xi^1)/N(\mathfrak{B}_\xi^2)$ et donnons sa valeur (cf. [3]):

a) si f_ξ est primaire $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathfrak{A}_\xi^1$ et $l_\xi = 1$.

b) si f_ξ est composé, θ_ξ est une unité et on sait que $\theta_\xi^{(\mathfrak{A}_\xi^1 + 2\mathbb{Z}(G_\xi))}$ est inclus dans E_ξ (cf. 2.1). Comme l'indice de $\mathfrak{A}_\xi^1 + 2\mathbb{Z}[G_\xi]$ dans $\mathbb{Z}[G_\xi]$ vaut 2, deux cas peuvent se produire:

i) $\theta_\xi \notin F$ d'où $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathfrak{A}_\xi^1 + 2\mathbb{Z}[G_\xi]$. Si g_ξ est composé $\mathfrak{B}_\xi^2 = \mathfrak{B}_\xi^1$ et $l_\xi = 1$; même résultat si g_ξ est 2-primaire. Enfin, si g_ξ est l-primaire, $l \neq 2$, $\mathfrak{B}_\xi^2 = \mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$ et $l_\xi = l$.

ii) $\theta_\xi \in F$ d'où $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathbb{Z}[G_\xi]$. Si g_ξ est composé, l_ξ vaut 1; si g_ξ est l-primaire, g_ξ vaut l.

En appliquant le théorème 2, avec $\mathfrak{A}_\xi = 2\mathfrak{A}_\xi^2$ (pour avoir $C_\xi \subseteq E_\xi$) et en extrayant les racines carrées, on obtient en posant $Q_G^{(2)} = C_G \cdot M_G / \prod_{\xi \neq \xi_0} l_\xi$:

COROLLAIRE 2. *L'indice de C^2 dans E vaut $h \cdot Q_G^{(2)}$.*

Remarque 1. Si G est cyclique le corollaire 2 donne

$$[E:C^2] = h \Big/ \prod_{\xi \neq \xi_0} l_\xi = \prod_\xi \left[E_\xi : C_\xi^2 \cdot \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}\right]$$

et prouve la divisibilité de h par $\prod_{\xi \neq \xi_0} l_\xi$; ce dernier résultat est aussi conséquence de la théorie des genres. De plus, si l'on suppose seulement que le p-groupe de Sylow de G est cyclique le résultat précédent reste vrai, si on se limite aux p-parties.

2.5. Les nombres intervenant dans le théorème 1 et les corollaires 1 et 2 du théorème 2 sont respectivement

$$Q_G = 2^{10} \cdot 3^3, \qquad Q_G^{(1)} = 2^4, \qquad Q_G^{(2)} = 2/3,$$

si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et si on a $\theta_\xi \in E_\xi$ pour tout $\xi \neq \xi_0$ (cette condition est remplie si f_ξ est divisible par au moins trois facteurs premiers distincts; c'est le cas pour l'extension obtenue en composant $\mathbb{Q}(\sqrt{15}, \sqrt{1729})$ avec une des 4 sous-extensions cubiques de $\mathbb{Q}(\zeta_{1729})$ ramifiées en 7,13 et 19), et

$$Q_G = 3^{33} \cdot 5^8, \qquad Q_G^{(1)} = 3^{17}, \qquad Q_G^{(2)} = 3^{13}/5,$$

si $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et si f_ξ est composé pour tout $\xi \neq \xi_0$.

2.6. Dans [3], G. Gras considère l'idéal $\mathfrak{A}_\xi^3 = \{\alpha \in \mathbb{Z}[G_\xi], \theta_\xi^\alpha \in E_\xi\}$ et suppose G cyclique. Le théorème 2 s'applique sans cette restriction: les résultats sont similaires à ceux de 2.4 à condition de remplacer la condition $\theta_\xi \in F$ (resp. $\theta_\xi \notin F$) par $\theta_\xi \in F_\xi$ (resp. $\theta_\xi \notin F_\xi$) lors du calcul de l_ξ. Par rapport à [3], nous avons en plus la formule pour l'indice de C^3 dans E. Remarquons que si G est cyclique, on déduit du lemme 3 bis (ci-dessous § 3.2) que les idéaux $\mathfrak{A}_\xi^2$ et $\mathfrak{A}_\xi^3$ sont en fait égaux.

2.7. Si on pose $h_\xi^i = [E_\xi : C_\xi^i \cdot \prod_{\xi' < \xi} E_{\xi'}]$, pour $i = 0, 1, 3$, alors on peut écrire une formule comparable à celle de [7 § 9 Satz 21], c'est-à-dire de la forme

$$h = \frac{Q'_F}{Q_G^{(i)}} \prod_{\xi \neq \xi_0} h_\xi^i$$

avec $Q'_F = [E : \prod E_\xi]$ (c'est un diviseur de l'indice $Q_F{}^+$ de [7]; Q'_F dépend de la structure galoisienne de E mais vaut 1 si G est cyclique) et $Q_G^{(i)}$ coefficient ne dépendant pour $i = 0, 1, 3$ que de la structure du groupe G. De plus, h_ξ^i (i fixé) est alors une fonction du couple (F, ξ) qui ne dépend que du corps F_ξ.

En particulier, avec $i = 1$, on obtient (en posant $h_{\xi_0}^1 = 1$):

$$h = \frac{[E : \prod E_\xi]}{M_G \cdot C_G} \cdot \prod h_\xi^1.$$

En appliquant ceci à F_ξ, on trouve

$$h_{F_\xi} = \prod_{\xi' \leqslant \xi} h^1_{\xi'},$$

d'où en utilisant la fonction de Moebius

$$h^1_{\xi'} = \prod_{\xi \leqslant \xi'} h_{F_\xi}^{\mu(g_{\xi'}/g_\xi)}.$$

On a donc démontré le résultat:

THÉORÈME 3. *Le nombre de classes de F est relié à celui de ses sous-corps cycliques par*:

$$h = \frac{[E : \prod E_\xi]}{M_G \cdot C_G} \cdot \prod_\xi h_{F_\xi}^{c_\xi} \qquad \textit{avec} \quad c_\xi = \sum_{\xi' \geqslant \xi} \mu(g_{\xi'}/g_\xi).$$

Si G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, on retrouve le résultat de [6]:

$$h = \frac{[E : \prod E_\xi]}{p^m} \cdot \prod_\xi h_{F_\xi}$$

$$\textit{avec} \quad m = \frac{1}{2}\left[(n-1)\,p^n + 1 + \frac{p^n - 1}{p - 1}\right] - n.$$

2.8. Considérons le groupe

$$H = \Big(\pm \prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{\mathbb{Z}[G_\xi]}\Big) \cap E$$

que Leopoldt ([7]) appelle groupe des unités cyclotomiques. En posant $\mathfrak{A}_\xi{}^4 = \mathbb{Z}[G_\xi]$ (resp. $I(G_\xi)$) si f_ξ est composé (resp. primaire) et en étudiant les valuations des éléments du produit des groupes $\theta_\xi^{\mathbb{Z}[G_\xi]}$, on montre l'inclusion de H dans C^4. L'indice de C^2 dans H est un diviseur de celui de C^2 dans C^4: c'est donc une puissance de 2. Ainsi $[E : H]$ est égal à $[E : C^2]$ à une puissance de 2 près, puissance majorée par le nombre de caractères ξ vérifiant la condition b de 2.4.

3. Démonstration de résultats auxiliaires

3.1. Comme promis à la fin de 2.2, vérifions la condition (8) pour les familles d'idéaux de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ utilisées au § 2. De (6), on peut déduire, cf. [7, § 8.2] que

$$\text{pour tout } \xi' (\xi_0 < \xi' < \xi), \qquad \theta_\xi^{2 \cdot \nu_{\xi,\xi'}} = (-1)^\epsilon \cdot \theta_{\xi'}^{2 \cdot u} \tag{9}$$

avec $\epsilon = s(\xi') + s(\xi) \cdot g_\xi / g_{\xi'}$ et $u = 1$ si f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers et $\epsilon = s(\xi) \cdot g_\xi / g_{\xi'}$ et $u \in \mathfrak{A}^1_{\xi'} = I(G_{\xi'})$ sinon.

PROPOSITION 2. *La famille* $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}_\xi{}^0$ (resp. $\mathfrak{A}_\xi{}^1, 2\mathfrak{A}_\xi{}^4$), ξ *parcourant l'ensemble des caractères de G vérifie* (8).

Démonstration. Observons que les familles d'idéaux de la proposition 2 vérifient

$$\mathfrak{A}_\xi \cap \mathcal{N}_\xi = \mathfrak{A}_\xi \cdot \mathcal{N}_\xi . \tag{10}$$

Il suffit alors de vérifier que, pour tout ξ' ($\xi_0 < \xi' < \xi$), on a

$$\theta_\xi^{\nu_{\xi,\xi'} \cdot \mathfrak{A}_\xi} \subset \pm \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}_{\xi'}}. \tag{11}$$

Pour la famille $\mathfrak{A}_\xi{}^0$, on a $\mathfrak{A}_\xi{}^0 \cap \mathcal{N}_\xi = 0$. D'après (9), on a

$$\alpha \in I(G_\xi) + 2\mathbb{Z}[G_\xi] \Rightarrow \theta_\xi^{\nu_{\xi,\xi'} \cdot \alpha} = \pm \theta_{\xi'}^{u \cdot \alpha} \tag{12}$$

et ceci implique (11) pour les familles $\mathfrak{A}_\xi{}^1$ et $2\mathfrak{A}_\xi{}^4$.

PROPOSITION 2bis. *La famille* $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}_\xi{}^2$ (resp. $\mathfrak{A}_\xi{}^3$) *où* ξ *parcourt l'ensemble des caractères de G vérifie* (8).

Traitons d'abord un cas particulier.

LEMME 1. *Si f_ξ est composé et g_ξ est une puissance de* 2, *on a*

$$\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi{}^2 \cap \mathcal{N}_\xi} \subset \pm \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}^2_{\xi'}}$$

où ξ' est tel que $[F_\xi : F_{\xi'}] = 2$.

Démonstration. Si f_ξ et $f_{\xi'}$ n'ont pas les mêmes facteurs premiers, comme 2 divise $g_\xi / g_{\xi'}$, la formule (9) donne

$$\theta_\xi^{\nu_{\xi,\xi'}} \subset \pm \theta_{\xi'}^{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}. \tag{13}$$

Supposons que f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers; si $s(\xi')$ est pair, (13) est encore vérifié. Si $s(\xi')$ est impair, alors $f_\xi = 2f_{\xi'}$ et $F_\xi / F_{\xi'}$ est non ramifiée en dehors de 2. Il en est de même pour $F_\xi / \mathbb{Q}$, contrairement aux hypothèses du lemme. Puisque $\mathcal{N}_\xi$ est engendré par $\nu_{\xi,\xi'}$ (13) implique

$$\theta_\xi^{\mathcal{N}_\xi} \cap F \subset (\pm \theta_{\xi'}^{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}) \cap F,$$

ce qui prouve le lemme 1 d'après la définition même de $\mathfrak{A}_\xi{}^2$ et $\mathfrak{A}^2_{\xi'}$.

LEMME 2. *On a* $\mathfrak{A}_\xi^2 \cap \mathcal{N}_\xi = \mathfrak{A}_\xi^2 \cdot \mathcal{N}_\xi$, *sauf peut-être dans le cas où* f_ξ *est composé et* g_ξ *est puissance de* 2.

Démonstration. L'assertion du lemme 2 se voit facilement dans les cas a) et *b*, ii) de 2.4. Dans le cas *b*, *i*), $\mathfrak{A}_\xi^2$ est le noyau de l'application de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ envoyant $\sum n_\tau \cdot \tau$ (τ parcourant G_ξ) sur la classe modulo 2 de $\sum n_\tau$, de sorte qu'on peut écrire un diagramme commutatif où les lignes sont des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_\xi^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G_\xi] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_\xi^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G_\xi] & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et où les colonnes sont définies par multiplication par $P_{g_\xi}(\sigma_\xi)$ ou $P_{g_\xi}(1)$, cf. proposition 1. Le lemme du serpent permet d'écrire une suite exacte

$$\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z} + P_{g_\xi}(1)\,\mathbb{Z}) \to \mathfrak{A}_\xi^2/\mathfrak{A}_\xi^2 \cdot \mathcal{N}_\xi \to \mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi\,.$$

Comme $P_{g_\xi}(1)$ est la norme de $1 - \zeta_{g_\xi}$, il n'est divisible par 2 que si g_ξ est 2-primaire. D'où le lemme 2.

Achevons la démonstration de la proposition 2 bis. D'après les lemmes 1 et 2, il suffit de démontrer (11) pour tout couple de caractères ξ et ξ' tels que $F_{\xi'}$ soit inclus dans F_ξ avec $[F_\xi : F_{\xi'}]$ premier, ce que nous supposerons désormais. D'après (12), (8) est vérifié dans les cas a) et b, i) de 2.4. Plaçons-nous dans le cas b, ii) : $\mathfrak{A}_\xi^2 = \mathbb{Z}[G_\xi]$ et on sait que θ_ξ est réel donc que $s(\xi)$ est pair, cf. (6). Si f_ξ et $f_{\xi'}$ n'ont pas les mêmes facteurs premiers, $\theta_\xi^{\nu_{\xi,\xi'}}$ et $\theta_{\xi'}^{u}$ sont tous les deux dans F, u comme dans (9), et on déduit alors du fait que F est réel que

$$\theta_\xi^{\nu_{\xi,\xi'}} = \pm\theta_{\xi'}^{u} \in \theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}^2_{\xi'}}.$$

Si f_ξ et $f_{\xi'}$ ont les mêmes facteurs premiers, on a

$$s(\xi')/s(\xi) = (f_\xi/f_{\xi'})^{-1} \cdot (g_\xi/g_{\xi'})$$

et $s(\xi')$ est pair comme $s(\xi)$: c'est clair si $f_\xi/f_{\xi'}$ est impair; si $f_\xi/f_{\xi'}$ est pair, puisque $[F_\xi : F_{\xi'}]$ est premier, on a forcément $[F_\xi : F_{\xi'}] = 2 = f_\xi/f_{\xi'}$ d'où $s(\xi) = s(\xi')$. De la parité de $s(\xi')$, on tire alors de (9) :

$$\theta_\xi^{\nu_{\xi,\xi'}} = \pm\theta_{\xi'} \in (\pm\theta_{\xi'}^{\mathbb{Z}[G_{\xi'}]}) \cap F = \pm\theta_{\xi'}^{\mathfrak{A}^2_{\xi'}}.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 2 bis pour $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}_\xi^2$; le cas $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}_\xi^3$ se traite de façon analogue.

3.2. Soit $\xi \neq \xi_0$:

PROPOSITION 3. *Le $\mathbb{Z}$-module $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ est libre de rang $\varphi(g_\xi)$.*

Démontrons d'abord quelques lemmes:

LEMME 3. *Pour tout ξ', $\xi' < \xi$, $E_\xi/E_{\xi'}$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le lemme 3 bis.

LEMME 3bis. *Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}$, ϵ une unité de L, $\sqrt[n]{\epsilon}$ une racine $n^{\text{ième}}$ de ϵ, alors l'extension $L' = L(\sqrt[n]{\epsilon})$ n'est pas une extension cyclique réelle de $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Supposons en effet que $L'/\mathbb{Q}$ est cyclique réelle : L' contient les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité donc n est égal à 2. Soient $d = [L : \mathbb{Q}]$ et σ un générateur de $\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$; considérons $\alpha = (\sqrt[2]{\epsilon})^{1+\sigma+\cdots+\sigma^{d-1}}$. Il est clair que α^2 est une unité de $\mathbb{Q}$ donc vaut ± 1. Puisque L' est réelle on a donc $\alpha = \pm 1$. Mais la relation $(\sqrt[2]{\epsilon})^{\sigma^d} = -\sqrt[2]{\epsilon}$ implique $\alpha^\sigma = -\alpha$.

Soit p un nombre premier et désignons par $\xi(p)$ le caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $g_{\xi(p)} = g_\xi/p$ (resp. ξ_0) si g_ξ est (resp. n'est pas) divisible par p.

LEMME 4. *Le groupe $(E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}) \otimes \mathbb{Z}_p$ est isomorphe à un sous-groupe de $(E_\xi/E_{\xi(p)}) \otimes \mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. On peut décomposer G_ξ en un produit direct $\Gamma \times \Delta$ où Γ est un p-groupe et Δ un groupe d'ordre premier à p. Soit λ le caractère de Δ, défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que $\{\sigma \in \Delta \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\} = 1$ et e_λ l'idempotent de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ associé à λ par une formule analogue à (3). Le produit tensoriel de $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ avec $\mathbb{Z}_p$ est égal (en notations additives) à $e_\lambda((E_\xi/E_{\xi(p)} \otimes \mathbb{Z}_p)$ qui est facteur direct de $(E_\xi/E_{\xi(p)}) \otimes \mathbb{Z}_p$.

LEMME 5. *L'application canonique de $\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^0}$ dans $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ est injective.*

Démonstration. Soit $\theta_\xi{}^\alpha$ un élément du noyau avec $\alpha \in 2\mathfrak{A}_\xi{}^0$. On a alors

$$\theta_\xi^{u_\xi \cdot \alpha} = 1.$$

Mais d'après [7, § 8.4, (9)], $\theta_\xi^{u_\xi \cdot \gamma_\xi}$ est égal à $\theta_\xi^{[G]\cdot\gamma_\xi}$. Ainsi:

$$\theta_\xi^{[G]\alpha} = 1.$$

La nullité de α résulte alors de la fin du § 2.1.

Achevons la démonstration de la proposition 3 : les lemmes 3 et 4 montrent que $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ est sans torsion. L'homomorphisme du lemme 5 est injectif et son image est d'indice fini (cf. le théorème 1 appliqué à F_ξ). Le $\mathbb{Z}$-rang de $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$ est donc celui de $\theta_\xi^{2\mathfrak{A}_\xi^0}$, c'est-à-dire $\varphi(g_\xi)$ d'après la fin du § 2.1.

4. Démonstration du Théorème 2

Pour démontrer le théorème 2, considérons le diagramme (cf. (8)):

$$\mathfrak{A}_\xi \longrightarrow \mathfrak{A}_\xi/\mathfrak{A}_\xi \cap \mathscr{N}_\xi \xrightarrow{p_\xi} C_\xi/C_\xi \cap \prod_{\xi'<\xi} C_{\xi'} \xrightarrow{q_\xi} E_\xi\Big/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$$

qui permet de définir une application, injective d'après le lemme 5, $\mathfrak{B}_\xi \to E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$. Ceci prouve que p_ξ est un isomorphisme et q_ξ une injection.

4.1. Démontrons le lemme:

Lemme 6. *On a* $[E : C] = [E : \prod E_\xi] \cdot \prod_\xi [E_\xi : C_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}]$:

Démonstration. Nous allons construire des bases de $(\prod E_\xi)/\{\pm 1\}$ et $(\prod C_\xi)/\{\pm 1\}$. Utilisons la relation d'ordre $\prec$, sur l'ensemble des caractères de G; on a :

$$E_\xi \cap \prod_{\xi'\prec\xi} E_{\xi'} = \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}\,.$$

Soit en effet un élément α de E_ξ qui est dans $\prod_{\xi'\prec\xi} E_{\xi'}$. Sa norme de F à F_ξ est une puissance de α qui est dans $\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$. Donc d'après la proposition 3, α est dans $\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$. L'égalité précédente résulte immédiatement de l'inclusion ainsi démontrée. Elle permet de construire par récurrence une base de $(\prod_{\xi'\prec\xi} E_{\xi'})/\{\pm 1\}$: ayant une base de $(\prod_{\xi'\prec\xi} E_{\xi'})/\{\pm 1\}$, on la complète en remontant une base du $\mathbb{Z}$-module libre $E_\xi/\prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$. A la fin, on a donc une base de $\prod E_\xi/\{\pm 1\}$.

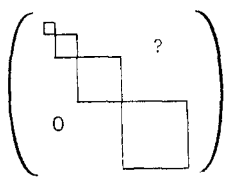
D'autre part, comme q_ξ est une injection, on a une suite d'inclusions :

$$C_\xi \cap \prod_{\xi'\prec\xi} C_{\xi'} \subseteq C_\xi \cap \prod_{\xi'\prec\xi} E_{\xi'} \subseteq C_\xi \cap \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$$

$$\subseteq C_\xi \cap \prod_{\xi'<\xi} C_{\xi'} \subseteq C_\xi \cap \prod_{\xi'\prec\xi} C_{\xi'}\,.$$

Ces inclusions sont donc des égalités, ce qui permet de construire une base de $(\prod C_\xi)/\{\pm 1\}$ par la même méthode que pour $(\prod E_\xi)/\{\pm 1\}$. Remarquons que pour chaque ξ, les bases de $C_\xi/C_\xi \cap \prod_{\xi'<\xi} C_{\xi'}$ sont en correspondance avec celles de $\mathfrak{B}_\xi$.

L'indice $[\prod E_\xi : \prod C_\xi]$ est au signe près le déterminant de la matrice exprimant une base de $(\prod C_\xi)/\{\pm 1\}$ dans une base de $(\prod E_\xi)/\{\pm 1\}$. Avec les bases considérées plus haut, cette matrice est triangulaire par blocs, i.e. de la forme



Son déterminant est égal au produit des déterminants des blocs; celui qui correspond à ξ est la matrice exprimant une base de $C_\xi/C_\xi \cap \prod_{\xi'<\xi} C_{\xi'}$ dans une base de $E_\xi/E_\xi \cap \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}$: au signe près, c'est $[E_\xi : C_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}]$ d'où le lemme.

4.2. On suppose $\xi \neq \xi_0$:

LEMME 7. *On a* $[E_\xi : C_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}] = [E_\xi : C_\xi^0 \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}]\,(N(\mathfrak{B}_\xi)/\prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1})$.

Démonstration. Grâce à l'injectivité de $q_\xi \circ p_\xi$, on voit que l'indice $[C_\xi \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'} : C_\xi^0 \prod_{\xi'<\xi} E_{\xi'}]$ est égal à $[\mathfrak{A}_\xi + \mathcal{N}_\xi : \mathfrak{A}_\xi^0 + \mathcal{N}_\xi]$ c'est-à-dire à $[\mathfrak{B}_\xi : \mathfrak{B}_\xi^0] = (N(\mathfrak{B}_\xi^0)/N(\mathfrak{B}_\xi))$. L'idéal $\mathfrak{B}_\xi^0$ est engendré par $\prod_{p|g_\xi}(1 - \zeta_{g_\xi}^{g_\xi/p}) = \prod_{p|g_\xi}(1-\zeta_p)$. Sa norme est donc $\prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}$; d'où le lemme.

4.3. Le théorème 2 résulte alors du théorème 1, des deux lemmes précédents et de (4).

5. LOCALISATION

Soit l un nombre premier et décomposons G en un produit d'un l-groupe Γ par un groupe Δ d'ordre premier à l. Choisissons une valeur absolue dans une clôture algébrique Ω_l de $\mathbb{Q}_l$ telle qu'on ait $|\, l\,| = 1/l$. Soit Φ un caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}_l$, Φ non trivial, d la dimension de Φ et

$$e_\Phi = \frac{1}{[\Delta]} \sum_{\sigma\in\Delta} \Phi(\sigma^{-1})\,\sigma$$

l'idempotent de $\mathbb{Z}_l[\Delta]$ correspondant. Désignons par Φ^* le caractère de G induit par Φ.

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{L}$ de F au-dessus de l, désignons par $U_\mathfrak{L}$ le groupe des unités du complété correspondant $F_\mathfrak{L}$ de F, qui sont congrues à 1 modulo le complété de $\mathfrak{L}$. Soit U le produit des groupes $U_\mathfrak{L}$. Considérons (pour $i = 0, 1, 2, 3$) l'intersection de U et de l'image de C^i par l'application diagonale $F \to \prod_{\mathfrak{L}|l} F_\mathfrak{L}$. Désignons par $\bar{C}_i$ sa fermeture dans U muni de la topologie produit. On sait que $U/\bar{C}_i$ est un $\mathbb{Z}_l[\Delta]$-module. Si χ est un caractère de G intervenant dans le décomposition de Φ^* en caractères absolument irréductibles sur Ω_l (on écrit $\chi \mid \Phi^*$), notons $L_l(s, \chi)$ la fonction L l-adique associée au caractère de Dirichlet primitif χ défini par χ (cf. [5]). D'après [1], le groupe $e_\Phi(U/\bar{C}_0)$ est fini d'ordre

$$[e_\Phi(U/\bar{C}_0)] = (N_\Gamma)^d \left| \prod_{\chi \mid \Phi^*} \frac{L_l(1, \chi)}{2} \right|^{-1} \tag{14}$$

THÉORÈME 4. *Pour $i = 1, 2, 3$, on a :*

$$[e_\Phi(U/\bar{C}_i)] = (C_\Gamma)^d \left| \prod_{\chi \mid \Phi^*} \frac{L_l(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

Si Γ est cyclique C_Γ vaut 1 et on retrouve le résultat de [1, § 5].

Démonstration. Soit ξ un caractère de G défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Observons d'abord que si Φ ne figure pas dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_l$ de la restriction de ξ à Δ on a (Δ opérant sur $\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi$ via $\mathbb{Z}[\Delta] \hookrightarrow \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G_\xi] \to \mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi$) :

$$e_\Phi((\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi) \otimes \mathbb{Z}_l) = 0. \tag{15}$$

Supposons maintenant que Φ intervienne dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_l$ de la restriction de ξ à Δ. Soit g'_ξ le plus grand diviseur de g_ξ premier à l. On voit alors que la restriction de ξ à Γ est égale à $\varphi(g'_\xi)$ fois un caractère λ de Γ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Notons g_λ l'indice de $\ker \lambda = \{\sigma \in \Gamma \mid \lambda(\sigma) = \lambda(1)\}$ dans Γ; g_λ est la plus grande puissance de l divisant g_ξ. De plus ξ est caractérisé par λ. Soit χ un facteur de la décomposition de ξ sur Ω_l : χ permet de définir un isomorphisme

$$e_\Phi((\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi) \otimes \mathbb{Z}_l) \to \mathbb{Z}_l[\zeta_{g_\xi}]; \tag{16}$$

à un élément $e_\Phi(\bar{\alpha} \otimes 1)$ avec $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi$, on associe $\chi(\alpha)$ où α est un élément d'image $\bar{\alpha}$ par la surjection composée

$$\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G_\xi] \to \mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi .$$

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème 4, en notant que l'on peut supposer Γ non trivial (sinon $N_\Gamma = C_\Gamma = 1$). Il suffit (cf. (14)) de montrer que $e_\Phi((C^i/C^0) \otimes \mathbb{Z}_l)$ est d'ordre $(N_\Gamma/C_\Gamma)^d$. Or en raisonnant comme au § 4, on voit qu'on a :

$$[e_\Phi((C^i/C^0) \otimes \mathbb{Z}_l)] = \prod_\xi [e_\Phi([(\mathfrak{A}_\xi^{\,i} + \mathcal{N}_\xi)/(\mathfrak{A}_\xi^{\,0} + \mathcal{N}_\xi)] \otimes \mathbb{Z}_l)].$$

D'après (15), on peut se restreindre aux caractères ξ tels que Φ intervienne dans la décomposition sur $\mathbb{Q}_l$ de leur restriction à Δ. On utilise alors l'isomorphisme (16) : $e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi{}^1 + \mathscr{N}_\xi) \otimes \mathbb{Z}_l)$ est envoyé sur l'idéal de $\mathbb{Z}_l[\zeta_{g_\xi}]$ engendré par $1 - \zeta_{g_\xi}$; mais Φ étant non trivial, cet idéal est $\mathbb{Z}_l[\zeta_{g_\xi}]$ lui-même. Pour $e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi{}^i + \mathscr{N}_\xi) \otimes \mathbb{Z}_l)$, avec $i = 2$ ou 3, le résultat est similaire. Par l'isomorphisme (16), $e_\Phi((\mathfrak{A}_\xi{}^0 + \mathscr{N}_\xi) \otimes \mathbb{Z}_l)$ est envoyé sur l'idéal de $\mathbb{Z}_l[\zeta_{g_\xi}]$ engendré par $\prod_{p|g_\xi} (1 - \zeta_p)$ donc aussi par $1 - \zeta_l$ (par 1 si λ est trivial). Comme le degré de $\mathbb{Q}_l[\zeta_{g_\xi}]$ sur $\mathbb{Q}_l$ est $d \cdot \varphi(g_\lambda)$, la norme de $1 - \zeta_l$ (si λ est non trivial) est égale à la puissance $d \cdot \varphi(g_\lambda)/(l - 1)$ de l. On a donc :

$$[e_\Phi(C^i/C^0) \otimes \mathbb{Z}_l] = \Big(\prod_\lambda l^{\varphi(g_\lambda)/l-1}\Big)^d$$

où dans le produit, λ parcourt l'ensemble des caractères non triviaux de Γ définis et irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Ceci achève la démonstration du théorème en vertu de (4).

6. Résultats sur les unités elliptiques

6.1. Soit k un corps quadratique imaginaire et F une extension abélienne finie de k. Considérons le corps de classes de Hilbert de k et son intersection K avec F. On reprend les notations du § 1 pour l'extension F/K. De plus, pour tout L, extension finie de k, on pose $\mu_L = \mu \cap L$ (resp. $e_L = [\mu_L]$) et on désigne par $\mu_L^{(p)}$ (resp. $e_L^{(p)}$) sa p-partie. Soit $\mathfrak{G}_\xi$ (resp. $\mathfrak{f}_\xi$) le groupe de Galois (resp. le conducteur) de F_ξ/k. Pour $\xi \neq \xi_0$, soit f_ξ le plus petit entier > 0 contenu dans $\mathfrak{f}_\xi$ et $e(\mathfrak{f}_\xi)$ le nombre d'éléments de μ_k congrus à 1 modulo $\mathfrak{f}_\xi$. On pose

$$m_\xi = 12 \cdot f_\xi \cdot e(\mathfrak{f}_\xi).$$

Pour chaque élément τ de $\mathfrak{G}_\xi$ choisissons un idéal entier $\mathfrak{A}_\tau$ de k premier à $6f_\xi$, d'image τ par l'homomorphisme d'Artin de F_ξ/k. La classe modulo e_{F_ξ} de la norme $N(\mathfrak{A}_\tau)$ de $\mathfrak{A}_\tau$ ne dépend pas du choix précédent, [8, § 4.1 lemme 5]. Ceci permet de définir un homomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi] \to \mathbb{Z}/e_{F_\xi}\mathbb{Z}; \tag{17}$$

soit J_ξ son noyau. Notons $\mathfrak{A}_\xi{}^0$ et $\mathfrak{A}_\xi{}^1$ les intersections de J_ξ avec les idéaux $(\gamma_\xi)\,\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ et $I(\mathfrak{G}_\xi)$ — cf. 1.1 et 1.3 — de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$. En définissant θ_ξ comme dans [2], soit $\theta_\xi^{J_\xi}$ (resp. $\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi{}^0}$, resp. $\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi{}^1}$) le groupe des éléments de F_ξ de la forme $\theta_\xi{}^\alpha$ avec α dans J_ξ (resp. $\mathfrak{A}_\xi{}^0$, resp. $\mathfrak{A}_\xi{}^1$). On sait que les éléments de $\theta_\xi^{J_\xi}$ sont des puissances d'ordre m_ξ dans F_ξ (cf. [2]). Soit $\Omega_\xi{}^i$ $(i = 0, 1)$ le groupe des unités de F_ξ qui sont racines d'ordre m_ξ d'éléments de $\theta_\xi^{\mathfrak{A}_\xi{}^i}$ et posons:

$$\Omega^i = \mu_F \cdot \prod \Omega_\xi{}^i \qquad \text{avec} \quad \Omega^i_{\xi_0} = E_K.$$

Comme e_{F_ξ} divise m_ξ [8, § 4.1], la partie de torsion de $\Omega_\xi{}^0$ (encore égale à celle de $\Omega_\xi{}^1$) est le groupe μ_{F_ξ}. Posons:

$$\omega_\xi{}^1 = \Omega_\xi{}^1 \cap \Big(\mu_F \cdot \prod_{\xi' \prec \xi} \Omega^1_{\xi'}\Big); \qquad \omega_\xi = \Omega_\xi{}^1 \cap \Big(\mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} \Omega^1_{\xi'}\Big);$$

ω_ξ est donc inclus dans $\omega_\xi{}^1$; ce dernier groupe dépend de l'ordre total $\leqslant$ choisi en 1.2. Considérons les deux conditions suivantes portant sur le caractère ξ ($\xi \neq \xi_0$):

i) $\Omega_\xi{}^1/\omega_\xi{}^1$ est sans torsion:

ii) il existe un nombre premier p divisant e_{F_ξ}/e_k tel que $F_\xi/K(\mu^{(p)}_{F_\xi})$ soit une p-extension non triviale.

Remarquons que la condition ii) ne peut être vérifiée que pour au plus un nombre premier p. Ainsi à ξ vérifiant ii) est associé un nombre premier p. Si ξ vérifie i) et ii) posons $l_\xi = p$; posons $l_\xi = 1$ sinon. En désignant par M_2 le nombre défini comme M_G (cf. § 1.3) en remplaçant G par $\mathrm{Gal}(K(\mu_F^{(2)})/K)$ —c'est l'entier q_F de [2]—on peut énoncer:

THÉORÈME 5. *On a*:

$$[E : \Omega^1] = \Big(\prod_{\xi \neq \xi_0} l_\xi\Big) \cdot (C_G)^{[\mathfrak{G}/G]} \cdot \frac{M_G}{M_2} \cdot \frac{h}{h_K}.$$

De plus, si G est cyclique, on a $M_2 = M_G = C_G = 1$ d'où:

COROLLAIRE. *Si G est cyclique, on a*:

$$[E : \Omega^1] = \Big(\prod_{\xi \neq \xi_0} l_\xi\Big) \cdot h/h_K.$$

THÉORÈME 6. *Supposons que G soit cyclique et que ξ vérifie la condition ii) ci-dessus avec $p \neq 2$, $p \neq 3$. Alors l_ξ vaut p si et seulement s'il existe un idéal premier de k, premier à p et ramifié dans F_ξ/k, tel que son indice de ramification divise e_{F_ξ}/e_k.*

Le démonstration du théorème 5 est faite au § 8, celle du théorème 6 au § 9 (cas $p = 2$ ou $p = 3$ compris; l'énoncé est alors plus compliqué: cf. 9.2 théorème 7).

6.2. Enonçons un résultat voisin de celui du lemme 6 du § 4.1.

LEMME 8. *On a* $[\Omega^1 : \Omega^0] = \prod_{\xi \neq \xi_0} [\Omega_\xi{}^1 : \Omega_\xi{}^0 \cdot \omega_\xi{}^1]$.

Démonstration. Il suffit de considérer le diagramme commutatif où les lignes sont des suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} \Omega^0_{\xi'} & \longrightarrow & \mu_F \cdot \prod_{\xi' \leqslant \xi} \Omega^0_{\xi'} & \longrightarrow & \Omega_\xi^0/\Omega_\xi^0 \cap \left(\mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} \Omega^0_{\xi'}\right) & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} \Omega^1_{\xi'} & \longrightarrow & \mu_F \cdot \prod_{\xi' \leqslant \xi} \Omega^1_{\xi'} & \longrightarrow & \Omega_\xi^1/\Omega_\xi^1 \cap \left(\mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} \Omega^1_{\xi'}\right) & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Le lemme 8 se déduit par récurrence sur ξ en appliquant le lemme du serpent et le résultat suivant:

LEMME 9. *Pour tout ξ, l'application canonique de Ω_ξ^0/μ_{F_ξ} dans $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ est injective.*

Démonstration. Soit ϵ un élément de Ω_ξ^0 qui est aussi dans ω_ξ^1, alors ϵ^{m_ξ} est de la forme θ_ξ^α, avec α dans $\gamma_\xi \cdot \mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$. Ainsi $\theta_\xi^{\alpha \cdot [G]/g_\xi}$ qui est la norme de θ_ξ^α entre F et F_ξ est dans $\mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'}$, donc $\theta_\xi^{\alpha \cdot [G] \cdot e_F}$ est dans $\prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'}$ et est annulé par u_ξ (cf. § 1). L'égalité (1) de [2] prouve que $\theta_\xi^{\alpha \cdot [G]^2 \cdot e_F}$ est trivial et [2, prop. 1] que α est trivial : ϵ est donc un élément de torsion de Ω_ξ^0, d'où le lemme 9.

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5

7.1. On fixe $\xi \neq \xi_0$ dans toute la suite de cet article, § 7.4 excepté. Soit $\tilde{\mathscr{N}}_\xi$ l'idéal de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ engendré par $\mathscr{N}_\xi$. Pour évaluer $[\Omega_\xi^1 : \Omega_\xi^0 \cdot \omega_\xi^1]$ introduisons les quatre indices (finis comme on le verra plus loin):

$$\begin{aligned}
a(\xi) &= [(\gamma_\xi) + \tilde{\mathscr{N}}_\xi : \mathfrak{A}_\xi^0 + \tilde{\mathscr{N}}_\xi] \\
b(\xi) &= [I(\mathfrak{G}_\xi) + \tilde{\mathscr{N}}_\xi : \mathfrak{A}_\xi^1 + \tilde{\mathscr{N}}_\xi] \\
c(\xi) &= [\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi] : (\gamma_\xi) + \tilde{\mathscr{N}}_\xi] \\
d(\xi) &= [\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi] : I(\mathfrak{G}_\xi) + \tilde{\mathscr{N}}_\xi]
\end{aligned}$$

qui vérifient

$$[\mathfrak{A}_\xi^1 : \mathfrak{A}_\xi^0 + \mathfrak{A}_\xi^1 \cap \tilde{\mathscr{N}}_\xi] = [\mathfrak{A}_\xi^1 + \tilde{\mathscr{N}}_\xi : \mathfrak{A}_\xi^0 + \tilde{\mathscr{N}}_\xi] = \frac{c(\xi) \cdot a(\xi)}{b(\xi) \cdot d(\xi)} \cdot \qquad (18)$$

On peut considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A}_\xi^0 & \xrightarrow{\sim} & \Omega_\xi^0/\mu_{F_\xi} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{A}_\xi^1/\mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathscr{N}}_\xi & \longrightarrow & \Omega_\xi^1/\omega_\xi^1,
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes surjectifs définis en associant à un élément α de $\mathfrak{A}_\xi{}^i$ ($i = 0$ ou 1) la classe d'une racine m_ξ-ième de $\theta_\xi{}^\alpha$; la flèche du haut est un isomorphisme, cf. [2, prop. 1]. La flèche du bas est bien définie car on a

$$\forall \xi',\ \xi' < \xi\colon (\Omega_\xi{}^1)^{\nu_{\xi,\xi'}} \subset \Omega_{\xi'}^1$$

d'après [8, § 2.3, théorème 2]. Soit $k(\xi)$ l'ordre du noyau de cette flèche (ce noyau est fini, cf. lemme 9). Le diagramme précédent montre qu'on a:

$$[\Omega_\xi{}^1 : \Omega_\xi{}^0 \cdot \omega_\xi{}^1] = [\mathfrak{A}_\xi{}^1/\mathfrak{A}_\xi{}^0 + \mathfrak{A}_\xi{}^1 \cdot \tilde{\mathscr{N}}_\xi]/k(\xi). \tag{19}$$

Rassemblons quelques propriétés de l'idéal $\tilde{\mathscr{N}}_\xi$:

LEMME 10. *L'annulateur de $\tilde{\mathscr{N}}_\xi$ dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ est l'idéal engendré par $Q_{g_\xi}(\sigma(\xi))$ où $Q_{g_\xi}(X)$ designe le polynôme quotient de $X^{g_\xi} - 1$ par $P_{g_\xi}(X)$; en particulier, il contient γ_ξ. De plus, on a :*

$$I(\mathfrak{G}_\xi) \cdot \tilde{\mathscr{N}}_\xi = I(\mathfrak{G}_\xi) \cap \tilde{\mathscr{N}}_\xi\,.$$

Démonstration. Un élément de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ annulant $\tilde{\mathscr{N}}_\xi$ provient d'un polynôme $R(X)$ de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $X^{g_\xi} - 1$ divise $R(X) \cdot P_{g_\xi}(X)$; $Q_{g_\xi}(X)$ divise donc $R(X)$. Par extension des scalaires de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ à $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$, on en déduit que l'annulateur de $\tilde{\mathscr{N}}_\xi$ est l'idéal de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ engendré par $Q_{g_\xi}(\sigma(\xi))$. Enfin, soit $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$. $\Sigma n_\tau\, \tau$ (τ parcourt $\mathfrak{G}_\xi$) un élément de $\tilde{\mathscr{N}}_\xi$. Si cet élément est aussi dans $I(\mathfrak{G}_\xi)$, on a

$$P_{g_\xi}(1) \cdot \sum n_\tau = 0$$

ce qui prouve que $\Sigma n_\tau\, \tau$ est dans $I(\mathfrak{G}_\xi)$ d'où la dernière assertion du lemme.

7.2. En utilisant (17) et la définition de $I(\mathfrak{G}_\xi)$, cf. aussi [8, § 4.1, lemme 6], on peut écrire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_\xi{}^1 & \longrightarrow & I(\mathfrak{G}_\xi) & \longrightarrow & e_k\mathbb{Z}/e_{F_\xi}\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{A}_\xi{}^1 & \longrightarrow & I(\mathfrak{G}_\xi) & \longrightarrow & e_k\mathbb{Z}/e_{F_\xi}\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les deux premières colonnes sont définies à l'aide de la multiplication par $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$. La dernière colonne en résulte par passage au quotient: elle est définie par la multiplication par $P_{g_\xi}(N_\xi)$ (avec $N_\xi = N(\mathcal{O}_{\sigma(\xi)})$). En appliquant le lemme du serpent et le lemme 10, on obtient la suite exacte

$$0 \to pgcd(Q_{g_\xi}(N_\xi), e_{F_\xi}) \cdot \mathbb{Z}/e_{F_\xi}\mathbb{Z} \to e_k\mathbb{Z}/pgcd(e_k \cdot P_{g_\xi}(N_\xi), e_{F_\xi}) \cdot \mathbb{Z}$$
$$\to \mathfrak{A}_\xi{}^1/\mathfrak{A}_\xi{}^1 \cdot \tilde{\mathscr{N}}_\xi \to I(\mathfrak{G}_\xi)/I(\mathfrak{G}_\xi) \cap \tilde{\mathscr{N}}_\xi \to e_k\mathbb{Z}/pgcd(e_k \cdot P_{g_\xi}(N_\xi), e_{F_\xi}) \cdot \mathbb{Z} \to 0.$$

On en déduit:

$$b(\xi) = [I(\mathfrak{G}_\xi) \colon \mathfrak{A}_\xi^1 + I(\mathfrak{G}_\xi) \cap \tilde{\mathcal{N}}_\xi] = pgcd\left(P_{g_\xi}(N_\xi), \frac{e_{F_\xi}}{e_k}\right). \tag{20}$$

On en tire aussi la suite exacte

$$0 \to pgcd(Q_{g_\xi}(N_\xi), e_{F_\xi}) \cdot \mathbb{Z}/e_{F_\xi} \cdot \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/b(\xi) \cdot \mathbb{Z}$$

$$\to \mathfrak{A}_\xi^1 \cap \tilde{\mathcal{N}}_\xi/\mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathcal{N}}_\xi \to 0. \tag{21}$$

Comme $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]/\tilde{\mathcal{N}}_\xi$ est un $\mathbb{Z}$-module isomorphe à $[\mathfrak{G}/G]$ copies de $\mathbb{Z}[G_\xi]/\mathcal{N}_\xi = \mathbb{Z}[\zeta_{g_\xi}]$, cf. (1), donc est sans torsion, on voit d'après (21) que $\mathfrak{A}_\xi^1 \cap \tilde{\mathcal{N}}_\xi/\mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathcal{N}}_\xi$ est le sous-groupe de torsion de $\mathfrak{A}_\xi^1/\mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathcal{N}}_\xi$ et que son ordre divise $b(\xi)$. En considérant les $\mathbb{Z}$-rangs, on déduit que le noyau de l'application $\mathfrak{A}_\xi^1/\mathfrak{A}_\xi^1\tilde{\mathcal{N}}_\xi \to \Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ est inclus dans $\mathfrak{A}_\xi^1 \cap \tilde{\mathcal{N}}_\xi/\mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathcal{N}}_\xi$. On obtient alors

$$[\mathfrak{A}_\xi^1 \cap \tilde{\mathcal{N}}_\xi/\mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathcal{N}}_\xi] = k(\xi) \cdot t(\xi) \tag{22}$$

en notant $t(\xi)$ l'ordre du sous-groupe de torsion de $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$. En comparant à (18) et à (19) et en notant que les sommes $\mathfrak{A}_\xi^0 + \mathfrak{A}_\xi^1 \cap \tilde{\mathcal{N}}_\xi$ et $\mathfrak{A}_\xi^0 + \mathfrak{A}_\xi^1 \cdot \tilde{\mathcal{N}}_\xi$ sont directes (cf. lemme 10), on obtient

$$[\Omega_\xi^1 : \Omega_\xi^0 \cdot \omega_\xi^1] = \frac{c(\xi)}{d(\xi)} \cdot \frac{a(\xi) \cdot t(\xi)}{b(\xi)}. \tag{23}$$

7.3. Rappelons la valeur de $a(\xi)$, cf. [2, lemmes 4, 6, 7]:

LEMME 11. *L'indice $a(\xi)$ vaut 1 sauf si F_ξ est engendré sur K par ζ_m, m puissance d'un nombre premier. Si $F_\xi = K(\zeta_{q^r})$ avec $r > 0$ et q premier alors $a(\xi)$ vaut q^ϵ où $\epsilon = 2$ si $F_\xi = K(\zeta_8) = K(\zeta_4)$ et $\epsilon = 1$ sinon. Enfin on a $a(\xi) = e_{F_\xi}/pgcd(e_{F_\xi}, n_\xi)$ avec $n_\xi = \prod_{p \mid g_\xi} (N_\xi^{g_\xi/p} - 1)$.*

Soit p un nombre premier; le lemme suivant donne la valuation p-adique de $b(\xi)$:

LEMME 12. *Si F_ξ est une p-extension de $K(\zeta_p)$ (resp. une 2-extension non triviale de $K(\zeta_4)$ si $p = 2$) et si p divise e_{F_ξ}/e_k, $v_p(b(\xi))$ vaut 1. Si $F_\xi = K(\zeta_4)$, $v_2(b(\xi))$ est égal à $v_2(a(\xi))$ et vaut 1 ou 2. Dans tous les autres cas $b(\xi)$ est premier à p.*

Démonstration. D'après (20), pour que p divise $b(\xi)$, il faut que p divise e_{F_ξ}/e_k. On peut donc supposer que F_ξ contient ζ_p (et ζ_4 si $p = 2$).

1*er cas.* Supposons qu'il existe un diviseur premier l, $l = p$, de $[F_\xi : K(\zeta_p)]$. Il résulte alors de [8, § 4.1, lemme 5] que p divise $N_\xi^{g_\xi/l} - 1$. Les valuations p-adiques de $N_\xi^{g_\xi/l}-1$ et $N_\xi^{g_\xi}-1$ sont alors égales; comme $(N_\xi^{g_\xi/l}-1)\cdot P_{g_\xi}(N_\xi)$ divise $N_\xi^{g_\xi}-1$, on a

$$0=v_p(P_{g_\xi}(N_\xi))=v_p(b(\xi)).$$

2e cas. Supposons que $[F_\xi : K(\zeta_p)]$ (ou $[F_\xi : K(\zeta_4)]$ si $p=2$) est une puissance non triviale de p. Alors pour tout l, $l\neq p$, $N_\xi^{g_\xi/l}-1$ est premier à p, cf. [8, § 4.1, lemme 5]. On a donc:

$$\begin{aligned} v_p(P_{g_\xi}(N_\xi)) &= v_p(N_\xi^{g_\xi}-1)-v_p(Q_{g_\xi}(N_\xi)) \\ &= v_p(N_\xi^{g_\xi}-1)-v_p(N_\xi^{g_\xi/p}-1)=1 \end{aligned}$$

puisque p (ou 4 si $p=2$) divise $N_\xi^{g_\xi/p}-1$ (cf. loc. cit.)

3e cas. On suppose que $F_\xi=K(\zeta_p), p\neq 2$. Alors (cf. loc. cit.) p divise $N_\xi^{g_\xi}-1$ et, pour tout l divisant g_ξ, est premier à $N_\xi^{g_\xi/l}-1$: ainsi $Q_{g_\xi}(N_\xi)$ est premier à p et p divise $P_{g_\xi}(N_\xi)$. On a donc:

$$v_p(b(\xi))=\inf(v_p(P_{g_\xi}(N_\xi)), v_p(e_{F_\xi}/e_k))=v_p(e_{F_\xi}/e_k).$$

4e cas. On suppose que $F_\xi=K(\zeta_4)$. Alors e_{F_ξ} divise N^2-1 et 2 divise exactement $N_\xi-1$ (cf. loc. cit.) donc $e_{F_\xi}^{(2)}/e_k^{(2)}$ divise $N_\xi+1=P_{g_\xi}(N_\xi)$. On a donc:

$$v_2(b(\xi))=v_2(e_{F_\xi}/e_k)=v_2(a(\xi))=1 \text{ ou } 2.$$

Remarque 2. Dans chacun des cas ci-dessus, on constate qu'on a

$$v_p(pgcd(Q_{g_\xi}(N_\xi), e_{F_\xi})=v_p(pgcd(n_\xi\,, e_{F_\xi}))$$

ce qui permet de réécrire (21) sous la forme

$$0\to\mathbb{Z}/a(\xi)\,\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/b(\xi)\,\mathbb{Z}\to\mathfrak{A}_\xi^1\cap\tilde{\mathcal{N}}_\xi/\mathfrak{A}_\xi^1\cdot\tilde{\mathcal{N}}_\xi\to 0. \qquad (21\text{ bis})$$

On voit alors d'après les lemmes 11 et 12 que l'entier $b(\xi)/a(\xi)$ n'est jamais composé. De plus, si p ne divise pas $b(\xi)/a(\xi)$, (21 bis) et (22) prouvent que $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ est sans torsion. Le résultat analogue est vrai pour Ω_ξ^1/ω_ξ, comme on le voit en reprenant les raisonnements du § 7.

7.4. On voit par extension des scalaires de $\mathbb{Z}[G_\xi]$ à $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ qu'on a

$$c(\xi)=[\mathbb{Z}[G_\xi]:\mathcal{N}_\xi+\gamma_\xi\mathbb{Z}[G_\xi]]^{[\mathfrak{G}/G]}.$$

En utilisant (1) (comme dans le § 4.2) et (4), on obtient

$$\prod_{\xi \neq \xi_0} c(\xi) = \Big(\prod_{\xi \neq \xi_0} \prod_{p | g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1}\Big)^{[\mathfrak{G}/G]} = (N_G/C_G)^{[\mathfrak{G}/G]}. \tag{24}$$

Pour évaluer $d(\xi)$, on utilise l'isomorphisme entre $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]/I(\mathfrak{G}_\xi)$ et $\mathbb{Z}$ obtenu en envoyant la classe de $\Sigma n_\tau \tau$ (τ parcourant $\mathfrak{G}_\xi$) sur Σn_τ. L'image de la classe de $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$ est $P_{g_\xi}(1)$, qui vaut ± 1 si g_ξ est composé et $\pm p$ si g_ξ est p-primaire. Ainsi

$$\prod_{\xi \neq \xi_0} d(\xi) = [G] \cdot M_G. \tag{25}$$

D'après le théorème de [2], on a

$$[E : \Omega^0] = \frac{(N_G)^{[\mathfrak{G}/G]}}{[G] \cdot M_2} \cdot \frac{h}{h_K}.$$

Le théorème 5 résulte alors de (23), (24) et (25) en observant que d'après la remarque 2 de 7.3, $b(\xi)/a(\xi)t(\xi)$ est un entier qui est égal soit à 1 soit à un nombre premier p. Les conditions i) et ii) signifient respectivement que $t(\xi)$ vaut 1 et que $b(\xi)/a(\xi)$ est différent de 1.

8. Résultats Auxiliaires

8.1. Pour tout caractère ξ' de G, $\xi' < \xi$, soit $r(\xi')$ un entier positif divisible par m_ξ et pour tout α dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ posons

$$\Theta_\alpha = \theta_\xi^{\alpha} \cdot \prod_{\xi_0 < \xi' < \xi} \theta_{\xi'}^{r(\xi')\cdot\alpha} \cdot \delta_{\bar{\alpha}}^{r(\xi_0)}$$

où $\bar{\alpha}$ désigne l'image de α dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}/G]$ et $\delta_{\bar{\alpha}}$ est défini comme dans [2, § 1].

Proposition 4. *L'application $\alpha \to \Theta_\alpha$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$-modules de $I(\mathfrak{G}_\xi)$ dans le groupe des unités de F_ξ ; c'est une injection pour un choix convenable des entiers $r(\xi')$.*

Démonstration. La première partie résulte de [8, § 2.3 théorème 1 et § 3.1 prop. 4]. Pour démontrer la deuxième partie, il suffit de prouver que le régulateur du groupe formé par les éléments Θ_α est non nul, c'est-à-dire, d'après le résultat classique sur les déterminants de groupes, cf. [4, § 11, formule (3)], que pour tout caractère absolument irréductible χ de $\mathfrak{G}_\xi$, $\chi \neq 1$, la somme

$$\Sigma(\chi) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_\xi} \chi(\sigma^{-1}) \log | \Theta_\sigma |$$

est non nulle. Posons

$$S(\chi, \xi') = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_\xi} \chi(\sigma^{-1}) \log | \theta_{\xi'}^{\sigma} | & \text{si} \quad \xi' \neq \xi_0 \\ \frac{1}{h_K} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_\xi} \chi(\sigma^{-1}) \log | \delta_{\bar{\sigma}} | & \text{si} \quad \xi' = \xi_0 . \end{cases}$$

Soit F_χ la sous-extension de F_ξ/k correspondant à ker χ. Soient $\mathfrak{f}_\chi$ le conducteur de χ et $\boldsymbol{\chi}$ (resp. $\boldsymbol{\chi}(\xi')$) le caractère de rayon $\mathfrak{f}_\chi$ (resp. $\mathfrak{f}_{\xi'}$ lorsque $\mathfrak{f}_\chi$ divise $\mathfrak{f}_{\xi'}$) défini par χ. Si $\mathfrak{P}$ est un diviseur de $\mathfrak{f}_\chi$, posons $\boldsymbol{\chi}(\mathfrak{P}) = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathfrak{P}) = 0$. Définissons $S(\boldsymbol{\chi})$ (resp. $S(\boldsymbol{\chi}(\xi'))$) comme dans [8, § 2.3], on a alors:

$$S(\chi, \xi') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad F_\chi \not\subset F_{\xi'} \\ (g_\xi/g_{\xi'}) \cdot S(\boldsymbol{\chi}(\xi')) & \text{si} \quad F_\chi \subset F_{\xi'} . \end{cases}$$

En définissant m_χ de façon analogue à m_ξ (cf. § 6.1), le corollaire 2 de [8, § 2.3] donne:

$$S(\boldsymbol{\chi}(\xi')) = \frac{m_{\xi'}}{m_\chi} \Big(\prod_{\mathfrak{P} | \mathfrak{f}_{\xi'}} (1 - \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathfrak{P})) \Big) \cdot S(\boldsymbol{\chi}).$$

D'où

$$\Sigma(\chi) = \Big(\sum_{\xi'} \frac{m_{\xi'}}{g_{\xi'}} \cdot r(\xi') \cdot \prod_{\mathfrak{P} | \mathfrak{f}_{\xi'}} (1 - \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathfrak{P})) \Big) \cdot \frac{S(\boldsymbol{\chi}) \cdot g_\xi}{m_\chi}$$

où la somme porte sur les caractères ξ' vérifiant $F_\chi \subseteq F_{\xi'} \subseteq F_\xi$. Pour faire en sorte que le régulateur soit non nul, choisissons les entiers $r(\xi')$ en faisant décroître $g_{\xi'}$. Pour ξ_0' fixé ($\xi_0 \leqslant \xi_0' < \xi$), en supposant déjà choisis les nombres $r(\xi')$ pour $g_{\xi'} > g_{\xi_0'}$, considérons un caractère χ tel que $F_\chi \cdot K = F_{\xi_0'}$. On a alors $\mathfrak{f}_{\xi_0'} = \mathfrak{f}_\chi$, de sorte que le coefficient de $r(\xi_0')$ dans $\Sigma(\chi)$ est non nul; en évitant un nombre fini d'entiers, on peut choisir $r(\xi_0')$ tel qu'on ait $\Sigma(\chi) \neq 0$ pour tout χ avec $F_\chi \cdot K = F_{\xi_0'}$. En choisissant ainsi $r(\xi')$ pour chaque ξ' ($\xi_0 \leqslant \xi' < \xi$) on aura $\Sigma(\chi) \neq 0$ pour tout $\chi \neq 1$.

8.2. Soient ξ et ξ^* deux caractères de G, on suppose que F_ξ/F_{ξ^*} est une p-extension (p premier fixé) non triviale et que F_{ξ^*} contient ζ_p (ζ_4 si $p = 2$) et que p divise e_{F_ξ}/e_k. Considérons l'application ψ définie par composition avec celle de (17)

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi] \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/e_{F_\xi}^{(p)} \cdot \mathbb{Z}.$$

Soit J_ξ^- l'image réciproque de l'idéal $(e_{F_\xi}/p) \cdot \mathbb{Z}/e_{F_\xi} \cdot \mathbb{Z}$ par l'application de (17).

LEMME 13. *Les idéaux de* $\mathbb{Z}/e_{F_\xi}^{(p)} \cdot \mathbb{Z}$ *engendrés par* $\psi(\nu_{\xi,\xi^*})$ *et* $\psi(g_\xi/g_{\xi^*})$ *sont égaux. Pour que* $J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$ *soit inclus dans l'idéal de* $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ *engendré par* $\mathfrak{A}_\xi^1$ *et* $\nu_{\xi,\xi^*} \cdot I(\mathfrak{G}_\xi)$, *il faut et il suffit que* pg_ξ/g_{ξ^*} *divise* e_{F_ξ}/e_k.

Démonstration. L'image de ν_{ξ,ξ^*} par ψ est égale à celle $N_\xi^{g_\xi} - 1/N_\xi^{g_{\xi^*}} - 1$, or ce nombre contient la même puissance de p que g_ξ/g_{ξ^*} puisque p (4, si $p = 2$) divise $N_\xi^{g_{\xi^*}} - 1$, cf. [8, § 4.1, lemme 5], d'où la première partie du lemme. Pour que $J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$ soit inclus dans l'idéal de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ engendré par $\mathfrak{A}_\xi^1$ et $\nu_{\xi,\xi^*} \cdot I(\mathfrak{G}_\xi)$ il faut et il suffit que son image par ψ soit incluse dans l'idéal engendré par $\psi(\nu_{\xi,\xi^*}) \cdot \psi(I(\mathfrak{G}_\xi))$, c'est-à-dire que $e_k \cdot g_\xi/g_{\xi^*}$ divise e_{F_ξ}/p d'où la fin du lemme.

Supposons de plus $\xi^* > \xi_0$. D'après [8, § 2.3, théorème 2], on a

$$\theta_\xi^{(e(\mathfrak{f}_{\xi^*})/e(\mathfrak{f}_\xi))\cdot\nu_{\xi,\xi^*}} = \theta_{\xi^*}^{(f_\xi/f_{\xi^*})\cdot\tilde{\nu}_{\xi,\xi^*}} \tag{26}$$

avec $\tilde{\nu}_{\xi,\xi^*} = \prod (1 - \sigma_{\mathfrak{Q}}^{-1})$ où $\mathfrak{Q}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de k divisant $\mathfrak{f}_\xi$ et non $\mathfrak{f}_{\xi^*}$, et $\sigma_{\mathfrak{Q}}$ est l'automorphisme de Frobenius associé à $\mathfrak{Q}$ dans F_{ξ^*}/k; $\tilde{\nu}_{\xi,\xi^*}$ est un élément de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi^*}]$.

Supposons alors que pg_ξ/g_{ξ^*} divise e_{F_ξ}/e_k et $N(\mathfrak{Q}) - 1$ pour un facteur $\mathfrak{Q}$ au moins de $\mathfrak{f}_\xi$ ne divisant pas $\mathfrak{f}_{\xi^*}$; soit α un élément de $J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$. On peut donc écrire (cf. lemme 13) α sous la forme $\beta + \nu_{\xi,\xi^*} \cdot \gamma$ avec $\beta \in \mathfrak{A}_\xi^1$ et $\gamma \in I(\mathfrak{G}_\xi)$. Soit γ' l'image canonique de γ dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi^*}]$; comme $\gamma \cdot \nu_{\xi,\xi^*}$ est dans $J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$ et p divise $N(\mathfrak{Q}) - 1$, on voit que $\gamma' \cdot \tilde{\nu}_{\xi,\xi^*}$ est dans $\mathfrak{A}_{\xi^*}^1$. Ainsi

$$\theta_\xi^{e(\mathfrak{f}_{\xi^*})\cdot\alpha} = \theta_\xi^{e(\mathfrak{f}_{\xi^*})\cdot\beta} \cdot \theta_{\xi^*}^{e(\mathfrak{f}_\xi)\cdot(f_\xi/f_{\xi^*})\cdot\tilde{\nu}_{\xi,\xi^*}\cdot\gamma'}$$

est dans $(\Omega_\xi^1 \cdot \Omega_{\xi^*}^1)^{e(\mathfrak{f}_{\xi^*})\cdot m_\xi}$. On a ainsi

$$\theta_\xi^{J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)} \subset \mu_{F_\xi} \cdot (\Omega_\xi^1 \cdot \Omega_{\xi^*}^1)^{m_\xi}. \tag{27}$$

8.3. On suppose maintenant que F_ξ est une p-extension (p nombre premier fixé) de $K(\zeta_p)$ et que p divise e_{F_ξ}/e_k; on définit J_ξ^- comme en 8.2.

LEMME 13 bis. *Pour que* $J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$ *soit inclus dans l'idéal de* $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ *engendré par* $\mathfrak{A}_\xi^1$ *et* $\nu_{\xi,\xi_0} \cdot I(\mathfrak{G}_\xi)$, *il faut et il suffit que* p *divise* e_K/e_k *et que* $F_\xi = K(\mu_{F_\xi}^{(p)})$.

Démonstration. Pour que $\mathfrak{A}_\xi^1 + \nu_{\xi,\xi_0} \cdot I(\mathfrak{G}_\xi)$ ne contienne pas $J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$, Il faut et il suffit qu'on ait (ψ comme en 8.2):

$$\psi(\nu_{\xi,\xi_0}) \cdot \psi(I(\mathfrak{G}_\xi)) = 0;$$

or $\psi(\nu_{\xi,\xi_0})$ est la classe de $(N_\xi^{g_\xi} - 1/N_\xi - 1)$ modulo $e_{F_\xi}^{(p)}$ et $\psi(I(\mathfrak{G}_\xi))$ est engendré par la classe de e_k.

1er cas. p (ou 4 si $p = 2$) divise e_K : les puissances de p dans g_ξ et $(N_\xi^{g_\xi} - 1/N_\xi - 1)$ sont égales. On voit que $e_{F_\xi}^{(p)}$ divise $g_\xi \cdot e_K$. Pour que $e_{F_\xi}^{(p)}$ ne divise pas $g_\xi \cdot e_k$, il faut et il suffit qu'on ait

$$e_k^{(p)} \neq e_K^{(p)} \quad \text{et} \quad e_{F_\xi}^{(p)} = g_\xi \cdot e_K^{(p)},$$

c'est-à-dire que p divise e_K/e_k et que $F_\xi = K(\mu_{F_\xi}^{(p)})$.

2e cas. p (ou 4 si $p = 2$) ne divise pas e_K. Alors les valuations p-adiques de $N_\xi - 1$ et de e_k sont égales, d'où

$$\psi(\nu_{\xi,\xi_0}) \cdot \psi(I(\mathfrak{G}_\xi)) = 0.$$

9. Étude du sous-groupe de torsion de $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$

D'après la fin de 7.3, on peut supposer que ξ vérifie la condition ii) de 6.1. Soit $\xi(p)$ le caractère de G tel que $[F_\xi : F_{\xi(p)}] = p$. Le groupe $\mu_{F_\xi}^{(p)}$ est donc contenu dans $F_{\xi(p)}$.

9.1. Comparons des sous-groupes de p-torsion par une méthode analogue à celle du lemme 4.

Lemme 14. *La surjection canonique $\Omega_\xi^1/\Omega_\xi^1 \cap (\mu_F \cdot \prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1) \to \Omega_\xi^1/\omega_\xi$ induit un isomorphisme sur les groupes de p-torsion. Il en est de même pour $\Omega_\xi^1/\omega_\xi \to \Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$, lorsque pour tout ξ' vérifiant $\xi' < \xi$, $[F_\xi \cdot F_{\xi'} : F_\xi]$ est premier à p.*

Remarque 3. Puisque Ω_ξ^1/ω_ξ et $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ contiennent tous les deux une image injective de Ω_ξ^0/μ_{F_ξ} (cf. lemme 9) avec un indice fini, les $\mathbb{Z}$-rangs de ces groupes sont égaux. Le sous-groupe de p-torsion de $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ est donc l'image de celui de Ω_ξ^1/ω_ξ. Ainsi pour que $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ soit sans p-torsion, il suffit qu'il en soit de même pour Ω_ξ^1/ω_ξ ou $\Omega_\xi^1/\Omega_\xi^1 \cap (\mu_F \cdot \prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1)$. Le lemme 14 donne une condition suffisante pour que la réciproque soit vraie. Cette condition est remplie lorsque le p-groupe de Sylow de G est cyclique. C'est pourquoi dans l'énoncé du théorème 6, on se limite au cas où G est cyclique.

Démonstration du lemme 14. Désignons par L la p-extension maximale de K contenue dans F_ξ et Δ le groupe de Galois de F_ξ/L. Soit λ le caractère de Δ, défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$, tel que ker λ (défini comme ker ξ, cf. 1.1) soit trivial. On a alors

$$e_\lambda((\Omega_\xi^1/\omega_\xi) \otimes \mathbb{Z}_p) = e_\lambda\left(\left(\Omega_\xi^1/\Omega_\xi^1 \cap \mu_F \cdot \prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1\right) \otimes \mathbb{Z}_p\right) \qquad (28)$$

Soit λ' un caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbb{Q}$ et distinct de λ (si $\Delta \neq 1$). Alors ker λ' définit une sous-extension de F_ξ/L qui est de la forme F_{ξ^*} pour un certain caractère ξ^* de G, $\xi^* < \xi$. Définissons $\xi^*(p)$ par la condition $[F_{\xi^*} : F_{\xi^*(p)}] = p$. On a :

$$e_{\lambda'}((\Omega_\xi^1/\omega_\xi) \otimes \mathbb{Z}_p) = 0. \tag{29}$$

De plus, une égalité analogue à (28) montre que

$$\begin{aligned} &e_{\lambda'}\left(\left(\Omega_\xi^1/\Omega_\xi^1 \cap \mu_F \prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1\right) \otimes \mathbb{Z}_p\right) \\ &= e_{\lambda'}\left(\left(\Omega_{\xi^*}^1/\Omega_{\xi^*}^1 \cap \mu_F \prod_{\xi' \leqslant \xi^*(p)} \Omega_{\xi'}^1\right) \otimes \mathbb{Z}_p\right) \\ &= e_{\lambda'}((\Omega_{\xi^*}^1/\omega_{\xi^*}) \otimes \mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

où $\Omega_{\xi^*}^1/\omega_{\xi^*}$ est sans p-torsion puisque F_{ξ^*} ne contient pas ζ_p, cf. 7.3, remarque 2 et lemme 12.

La deuxième partie du lemme provient du fait que $d = [\prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'} : F_\xi]$ est premier à p : si ϵ est un élément de Ω_ξ^1 dont la classe est dans le p-groupe de torsion de Ω_ξ^1/ω_ξ, et si ϵ est dans ω_ξ^1, alors ϵ^d, norme de ϵ entre $\prod_{\xi' < \xi} F_{\xi'}$ et F_ξ est dans ω_ξ donc ϵ aussi : l'application canonique $\Omega_\xi^1/\omega_\xi \to \Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ est donc injective sur les sous-groupes de p-torsion. Elle y est surjective d'après la remarque 3.

9.2. Un caractère ξ de G est dit exceptionnel si $F_\xi/K(\mu_{F_\xi}^{(p)})$ est une extension de degré p, non ramifiée en dehors de p et si de plus ζ_p (ou ζ_4 si $p = 2$) est dans K mais non dans k. Pour tout idéal premier $\mathfrak{Q}$ de k notons $T_\mathfrak{Q}$ son groupe d'inertie dans F_ξ/k. On peut énoncer un théorème tenant compte des cas $p = 2$ et $p = 3$. Le cas des caractères exceptionnels est traité en appendice.

THÉORÈME 7. *Soit ξ un caractère non exceptionnel vérifiant la condition ii) de* 6.1. *Alors Ω_ξ^1/ω_ξ est sans p-torsion si et seulement si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée* :

a) *Il existe un idéal premier $\mathfrak{Q}$ de k, premier à p, ramifié dans F_ξ/k, tel que $[T_\mathfrak{Q}]$ divise e_{F_ξ}/e_k* ;

b) $p \in \{2; 3\}$, *est totalement décomposé dans $k(\zeta_p)/k$ et possède un facteur premier dans k, $\mathfrak{P}$, tel que $[T_\mathfrak{P}] = p$.*

Remarque 4. Le théorème 6 se déduit alors du théorème 7 à l'aide de la remarque 3. Observons que même si G n'est pas cyclique, les conditions a) ou b) suffisent à assurer que $\Omega_\xi^1/\omega_\xi^1$ est sans torsion. Si G est cyclique, il possède au plus un caractère exceptionnel pour $p = 2$ et un pour $p = 3$; ceci conduit dans la formule du corollaire 1 du théorème 5 à une incertitude par un diviseur de 6, comparer à [8, § 6.5, corollaire du théorème 16].

Remarque 5. Si $p = 2$, dans b) l'hypothèse sur $k(\zeta_p)/k$ est vide; si $p = 3$, elle signifie que k est de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ avec d entier positif sans facteur carré et congru à 3 modulo 9.

Remarque 6. Si ξ est exceptionnel, ou vérifie la condition b), $p = 2$ ou $p = 3$. En effet, $\zeta_p(\zeta_4$ si $p = 2)$ est dans K donc l'indice de ramification de p dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}(\zeta_4)/\mathbb{Q}$) est au plus 2.

9.3. Montrons que si aucune des conditions a) ou b) du théorème 7 n'est vérifiée, le sous-groupe de p-torsion de Ω_ξ^1/ω_ξ est non nul. Observons d'abord que, puisque ξ n'est pas exceptionnel et ne vérifie pas a), on a $\xi(p) \neq \xi_0$. Nous allons trouver un caractère ξ^*, vérifiant $\xi^* < \xi(p)$, de G tel que

$$J_{\xi(p)}^- \cap I(\mathfrak{G}_{\xi(p)}) \not\subset \mathfrak{A}_{\xi(p)}^1 + \nu_{\xi(p),\xi^*}\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}] \tag{30}$$

et tel que, pour tout caractère ξ' vérifiant $\xi^* < \xi' < \xi(p)$, $\mathfrak{f}_{\xi'}$ et $\mathfrak{f}_{\xi(p)}$ aient les mêmes facteurs premiers. En désignant par E^* le groupe des unités de F_{ξ^*}, on aura alors, cf. [8, § 2.3 théorème 2] :

$$\prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1 \subset \Omega_{\xi(p)}^1 \cdot E^*. \tag{31}$$

1er cas. ζ_p (ou ζ_4 si $p = 2$) n'est pas dans K et il existe un idéal premier $\mathfrak{Q}$ de k, premier à p, ramifié dans F_ξ/k. Choisissons le tel que $[T_\mathfrak{Q}]$ soit minimal et soit ξ^* le caractère de G vérifiant $T_\mathfrak{Q} = \mathrm{Gal}(F_\xi/F_{\xi^*})$. Le lemme 13 implique (30) puisque la condition a) n'est pas vérifiée.

2e cas. ζ_p (ou ζ_4 si $p = 2$) n'est pas dans K et F_ξ/k est non ramifiée en dehors de p. En posant $\xi^* = \xi_0$, (30) résulte du lemme 13bis, puisque ξ n'est pas exceptionnel.

3e cas. ζ_p (ou ζ_4 si $p = 2$) est dans K; F_ξ/K est alors une p-extension. Soient T un groupe d'inertie non trivial de $F_{\xi(p)}/K$, d'ordre minimum et ξ^* le caractère de G tel que $T = \mathrm{Gal}(F_{\xi(p)}/F_{\xi^*})$. Si $p \cdot [T] = [T_\mathfrak{Q}]$ avec $\mathfrak{Q}$ idéal premier de k, premier à p, (30) résulte du lemme 13 puisque a) n'est pas vérifiée. S'il existe $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ idéaux premiers de k, $\mathfrak{P}$ diviseur de p et $\mathfrak{Q}$ premier à p tels que $p \cdot [T] = [T_\mathfrak{P}] < [T_\mathfrak{Q}]$, alors $e_{F_\xi}^{(p)} = e_K^{(p)}$ d'où $e_{F_\xi}^{(p)} = p \cdot e_k^{(p)}$ et (30) résulte encore du lemme 13. Enfin, si F_ξ/k est non ramifiée en dehors de p, (30) résulte du lemme 13 bis puisque ξ n'est pas exceptionnel.

D'après (30), on peut trouver un élément α' de $J_{\xi(p)}^- \cap I(\mathfrak{G}_{\xi(p)})$ qui n'est pas dans la somme des idéaux $\mathfrak{A}_{\xi(p)}^1$ et $\nu_{\xi(p),\xi^*}\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]$. Comme ni a) ni b) ne sont vérifiés, $\alpha'' = \alpha' \cdot \tilde{\nu}_{\xi,\xi(p)}$ n'est pas non plus dans cette somme, cf. [8, § 4.1, lemme 5]. Soit alors α un élément de $I(\mathfrak{G}_\xi)$ d'image α' dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]$.

Alors $\alpha \cdot \nu_{\xi,\xi(p)}$ est dans $\mathfrak{A}_{\xi}{}^1$ de sorte que l'élément

$$\theta_{\xi(p)}^{\alpha''\cdot f_\xi/f_{\xi(p)}} = \theta_{\xi}^{\alpha\cdot\nu_{\xi,\xi(p)}\cdot e(\mathfrak{f}_{\xi(p)})/e(\mathfrak{f}_\xi)},$$

cf. (26), est la puissance d'ordre $12 \cdot e(\mathfrak{f}_{\xi(p)}) \cdot f_\xi$ d'un élément ϵ de $\Omega_\xi{}^1$. De plus $\epsilon^{p\cdot m_{\xi(p)}}$ ne diffère de $\theta_{\xi(p)}^{p\cdot\alpha''}$ que d'une racine de l'unité. Comme $p \cdot \alpha''$ est dans $\mathfrak{A}^1_{\xi(p)}$, on a

$$\epsilon^p \in \mu_{F_\xi} \cdot \Omega^1_{\xi(p)},$$

ce qui prouve que la classe de ϵ est un élément de p-torsion dans $\Omega_\xi{}^1/\omega_\xi$.

Si ϵ est inclus dans ω_ξ, ϵ est dans $\mu_{F_\xi} \cdot \Omega^1_{\xi(p)} \cdot E^*$ et de [8, § 4.1, lemme 7], on déduit que

$$\epsilon^{12\cdot f_\xi\cdot e(\mathfrak{f}_{\xi(p)})} \in (\Omega^1_{\xi(p)})^{12\cdot f_\xi\cdot e(\mathfrak{f}_{\xi(p)})} \cdot E^*$$

c'est-à-dire qu'on peut trouver un élément β de $\mathfrak{A}^1_{\xi(p)}$ tel que $(\alpha'' - \beta) f_\xi/f_{\xi(p)}$ soit dans le noyau de l'application

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}] \to \theta_{\xi(p)}^{\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]} \cdot E^*/E^* \tag{32}$$

qui à un élément γ associe la classe de $\theta^\gamma_{\xi(p)}$ modulo E^*. Le lemme suivant montre que α'' est dans l'idéal de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]$ engendré par $\mathfrak{A}^1_{\xi(p)}$ et $\nu_{\xi(p),\xi^*}$, ce qui est en contradiction avec le choix de α'. La classe de ϵ dans $\Omega_\xi{}^1/\omega_\xi$ est donc non nulle; le sous-groupe de p torsion de $\Omega_\xi{}^1/\omega_\xi$ n'est donc pas trivial.

LEMME 15. *Le noyau de l'application* (32) *est l'idéal de* $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]$ *engendré par* $\nu_{\xi(p),\xi^*}$.

Démonstration. Il est clair que le noyau contient l'idéal en question. De plus, compte tenu du théorème 5 appliqué à $F_{\xi(p)}$, (31) montre que le $\mathbb{Z}$-rang de $\Omega^1_{\xi(p)} \cdot E^*$ est égal à $[F_{\xi(p)} : k] - 1$; celui de $\Omega^1_{\xi(p)} \cdot E^*/E^*$ est donc égal à $[\mathfrak{G}/G](g_{\xi(p)} - g_{\xi^*})$. Il en résulte que les $\mathbb{Z}$-rangs de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]/(\nu_{\xi(p),\xi^*})$ et $\Omega^1_{\xi(p)} \cdot E^*/E^*$ sont égaux, ce qui prouve le lemme 15 puisque $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]/(\nu_{\xi(p),\xi^*})$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion.

9.4. Montrons que les conditions a) et b) du théorème 7 impliquent que $\Omega_\xi{}^1/\omega_\xi \simeq \mu_F \cdot \prod_{\xi'\leqslant\xi} \Omega^1_{\xi'}/\mu_F \cdot \prod_{\xi'<\xi} \Omega^1_{\xi'}$ est sans p-torsion. Soit ϵ un élément de $\mu_F \prod_{\xi'\leqslant\xi} \Omega^1_{\xi'}$, tel que ϵ^p soit dans $\mu_F \cdot \prod_{\xi'<\xi} \Omega^1_{\xi'}$. D'après (29), on peut supposer que ϵ est de la forme η^{u_λ} avec η dans $\mu_F \cdot \prod_{\xi'\leqslant\xi} \Omega^1_{\xi'}$ (λ comme dans la démonstration du lemme 14, u_λ défini comme u_ξ, cf. 1.3). De plus, sans changer la classe de η modulo $\mu_F \cdot \prod_{\xi'<\xi} \Omega^1_{\xi'}$, on peut supposer que η^{m_ξ} est égal à Θ_α, pour un α dans $\mathfrak{A}_\xi{}^1$ (Θ_α défini comme en 8.1, les entiers $r(\xi')$ étant convenablement choisis). La divisibilité de m_ξ par p, implique que $\epsilon^{m_\xi} = \Theta_{\alpha\cdot u_\lambda}$ est dans $F_{\xi(p)}$. De la proposition 4, on déduit que $\alpha \cdot u_\lambda$ est de la forme $\nu_{\xi,\xi(p)} \cdot \beta$ avec β dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$. De plus, comme α est dans $\mathfrak{A}_\xi{}^1$, β est dans

$J_\xi^- \cap I(\mathfrak{G}_\xi)$. Si $\xi(p) \neq \xi_0$, soit β' l'image de β dans $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi(p)}]$: c'est un élément de $J_{\xi(p)}^- \cap I(\mathfrak{G}_{\xi(p)})$ et on peut écrire

$$\epsilon^{m_{\xi(p)}} = \theta_{\xi(p)}^{\beta' \cdot \tilde{\nu}_{\xi,\xi(p)}} \cdot \epsilon' \tag{33}$$

avec ϵ' dans $\mu_F \cdot (\prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1)^{m_{\xi(p)}}$, cf. (26) et définition de $\Theta_{\alpha \cdot u_\lambda}$.

LEMME 16. *S'il existe un idéal premier $\mathfrak{Q}$ de k, premier a p tel que $[T_\mathfrak{Q}] = p$, ou si ξ vérifie la condition* b) *du théoreme* 7 *alors Ω_ξ^1/ω_ξ est sans torsion.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\xi(p) = \xi_0$. La condition ii) implique que $e_{F_\xi}^{(p)} = e_K^{(p)}$, donc que p divise e_K/e_k. Il existe alors un idéal premier $\mathfrak{Q}$ de k premier à p, ramifié dans F_ξ/K (sinon dans le cas b) ξ est exceptionnel). En choisissant ϵ comme au début de 9.4, ϵ^p est dans $\mu_{F_\xi} \cdot E_K$; donc on peut trouver d entier premier à p tel que ϵ^{dp} soit dans E_K et en considérant l'indice de ramification de $\mathfrak{Q}$ dans $K(\epsilon^d)/K$, on voit que ϵ^d est dans E_K, c'est-à-dire que ϵ est dans $\mu_{F_\xi} \cdot E_K$.

Supposons maintenant $\xi(p) \neq \xi_0$: les hypothèses du lemme impliquent que dans (33), $\beta' \cdot \tilde{\nu}_{\xi,\xi(p)}$ est dans $\mathfrak{A}_{\xi(p)}^1$ donc que le deuxième membre est dans $\mu_F\,(\prod_{\xi' \leqslant \xi(p)} \Omega_{\xi'}^1)^{m_{\xi(p)}}$. Ce qui prouve que ϵ est dans ω_ξ et achève la démonstration du lemme.

Si ξ vérifie a), on peut se limiter au cas où $\mathfrak{Q}$ est choisi tel que $[T_\mathfrak{Q}]$ soit minimum avec $[T_\mathfrak{Q}] > p$. Soit alors ξ^* le caractère de G tel que $T_\mathfrak{Q} = \mathrm{Gal}\,(F_\xi/F_{\xi^*})$. Comme $[T_\mathfrak{Q}] = g_\xi/g_{\xi^*} = p \cdot g_{\xi(p)}/g_{\xi^*}$ divise e_{F_ξ}/e_k et aussi $N(\mathfrak{Q}) - 1$, $\mathfrak{Q}$ étant modérément et totalement ramifié dans F_ξ/F_{ξ^*}, on peut utiliser (27) où ξ est à remplacer par $\xi(p)$. Ainsi $\epsilon^{m_{\xi(p)}}$ est dans $\mu_F \cdot (\prod_{\xi' < \xi} \Omega_{\xi'}^1)^{m_{\xi(p)}}$ et ϵ est dans $\mu_F \cdot \prod_{\xi' < \xi} \Omega_{\xi'}^1$.

RÉFÉRENCES

1. R. GILLARD, Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_l$-extensions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **29** (1979), *Bull. Soc. Math. France* **107** (1979).
2. R. GILLARD ET G. ROBERT, Groupes d'unités élliptiques, à paraître.
3. G. GRAS, Application de la notion de φ-objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes; *Publ. Math. Fac. Sci. Besançon*, 1975–1976, fasc. 2, 1–100.
4. H. HASSE, "Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper," Akademie-Verlag, Berlin, 1952.
5. K. IWASAWA, "Lectures on p-Adic L Functions," Annals of Mathematical Studies No. 74, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1972.
6. S. KURODA, Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper, *Nagoya Math. J.* **1** (1950), 1–10.
7. H. LEOPOLDT, Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin Kl. Math. Phys. Tech.* **2** (1954), 3–48.
8. G. ROBERT, Unités elliptiques, *Bull. Soc. Math. France,* **36** (1973).